重要題

（１）次の曲線と直線で囲まれた部分の面積Sを求めよ。

（ｉ）　$y=\dfrac{1}{x^2}$, $y=x$, $y=\dfrac{1}{8}x$

（ii）　$0\leqq x\leqq 2\pi$ とする。$y=\sin x$, $y=\cos 2x$, y 軸, $x=2\pi$

（iii）　$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$, x 軸, y 軸

（２）原点から曲線　$y=\log 2x$ へ引いた接線とこの曲線　および x 軸で囲まれた部分の面積Sを求めよ。

（３）曲線$x=\cos t$, $y=\cos 2t$ $(0\leqq t\leqq\pi)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

（４）2つの曲線 $y=\sin x$, $y=\sin 2x$　ただし　$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{3}$ で囲まれた部分を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積Vを求めよ。

（５）曲線 $y=\sqrt{x}-\dfrac{x\sqrt{x}}{3}$ $(1\leqq x\leqq 4)$ の長さＬを求めよ。

（６）直線上を動く物体の t 秒後の速度　$v=40-1.5t-4\sqrt{t}$ であるとき　速度が０になるまでに進む道のりLを求めよ。

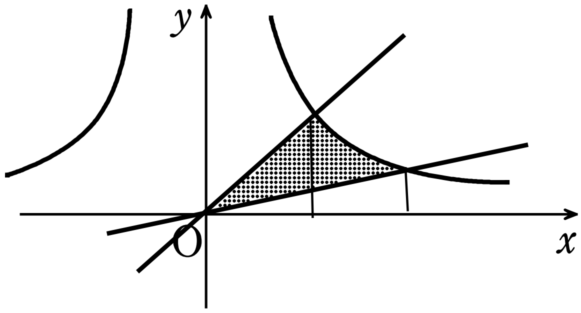
（７）水を満たした半径 acm の半球形の容器から静かに 30° 傾けるとき　こぼれる水の量はどれだけか。

（８） $a>0$ とする。関数 $y=ae^{\frac{x}{a}}$, $y=ae^{-\frac{x}{a}}$ のグラフと y 軸に平行な直線との交点をそれぞれP, Qとする。

（ｉ）線分PQの中点Mの軌跡を求めよ。

（ii） $x_0>0$ とする。 x 座標が $0\leqq x\leqq x_0$ の範囲内にある点Mの軌跡の長さを求めよ。

解答



（1）（i）$y=\dfrac{1}{x^2}$, $y=x$, $y=\dfrac{1}{8}x$

交点の x 座標　$\dfrac{1}{x^2}=x$ のとき $x=1$

$\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x}{8}$ のとき $x=2$

囲まれた部分の面積 $S=\int_0^1 xdx+\int_1^2\dfrac{1}{x^2}dx-\int_0^2\dfrac{1}{8}xdx$

$=\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^1-\left[\dfrac{1}{x}\right]_1^2-\dfrac{1}{16}\left[x^2\right]_0^2=\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{1}{2}-1\right)-\dfrac{1}{16}(4-0)$

$=\dfrac{3}{4}$

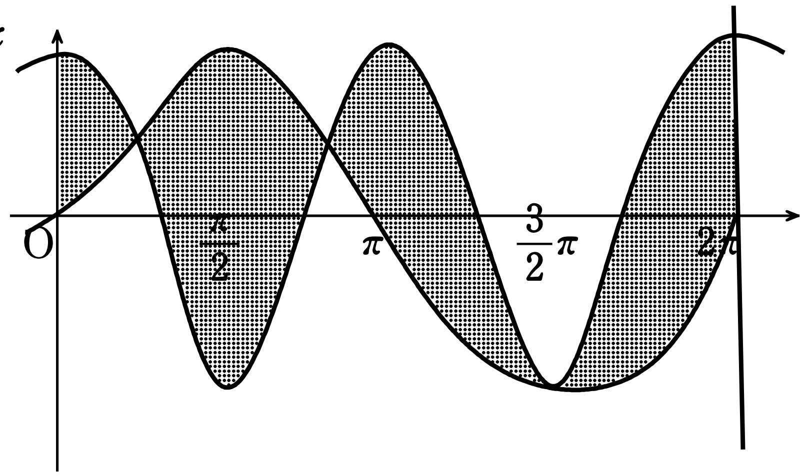
（ii）$y=\sin x$, $y=\cos 2x$, y 軸, $x=2\pi$

交点の x 座標　$\sin x=\cos 2x$

$2\sin^2 x-1+\sin x=0$

$(2\sin x-1)(\sin x+1)=0$

$\sin x=\dfrac{1}{2}$ より $x=\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5}{6}\pi$



$\sin x=-1$ より　$x=\dfrac{3}{2}\pi$

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos 2x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}(\sin x-\cos 2x)dx+\int_{\frac{5\pi}{6}}^{2\pi}(\cos 2x-\sin x)dx$$

不定積分 $\int(\cos 2x-\sin x)dx=\dfrac{1}{2}\sin 2x+\cos x+C$　従って

$$S=\left[\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}-\left[\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}+\left[\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x\right]_{\frac{5\pi}{6}}^{2\pi}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$$

$$-\left\{\left(-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

$$+\{(0+1)\}-\left(-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

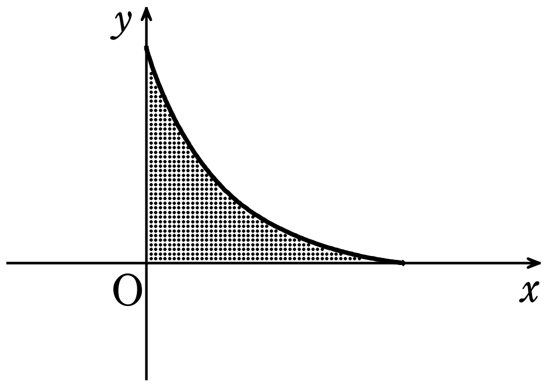
$$=\frac{1}{4}(\sqrt{3}+2\sqrt{3}-4)-\frac{1}{4}(-\sqrt{3}-2\sqrt{3}-\sqrt{3}-2\sqrt{3})$$

$$+\frac{1}{4}(4+\sqrt{3}+2\sqrt{3})=\frac{1}{4}(3\sqrt{3}-4+6\sqrt{3}+4+3\sqrt{3})$$

$$=3\sqrt{3}$$

（iii）$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$, x 軸, y 軸

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ より $y=1-2\sqrt{x}+x$



$$S=\int_0^1 y\,dx=\int_0^1(1-2\sqrt{x}+x)dx$$

$$=\left[x-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$=1-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

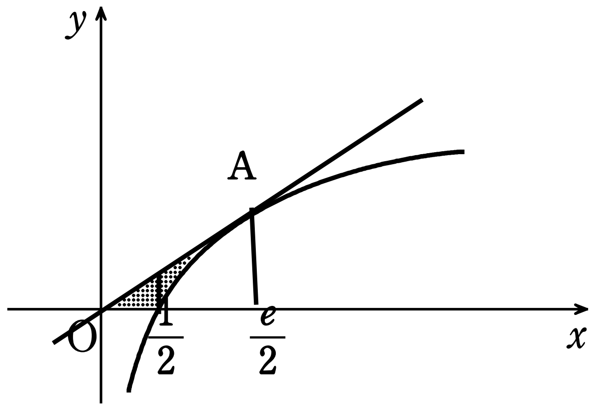
（２）曲線 $y=\log 2x$ 上の点 $A(a,\log 2a)$

における接線の方程式

$y-\log 2a=\dfrac{1}{a}(x-a)$　この接線が

原点を通ることから　$-\log 2a=-1$

よって　$a=\dfrac{e}{2}$　従って　接線の方程式



$y=\dfrac{2}{e}x$.　囲まれた部分の面積　$S=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2}{e}x\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}\left(\frac{2}{e}x-\log 2x\right)dx$

ここで　$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2}{e}xdx=\frac{2}{e}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{e}\left(\frac{1}{4}-0\right)=\frac{1}{4e}$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}\frac{2}{e}xdx=\frac{2}{e}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}=\frac{1}{e}\left(\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4e}(e^2-1)$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}\log 2x\,dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}(2x)'\log 2xdx=\frac{1}{2}\left\{[2x\log 2x]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}(2x)(\log 2x)'dx\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(e-0)-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}2x\cdot\frac{1}{x}dx\right\}=\frac{1}{2}\left\{e-2\left(\frac{e}{2}-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}$$

ゆえに　$S=\dfrac{1}{4e}+\dfrac{1}{4e}(e^2-1)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}(e-2)$

反省　$S=$（直角三角形の面積）$-\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}\log 2xdx$

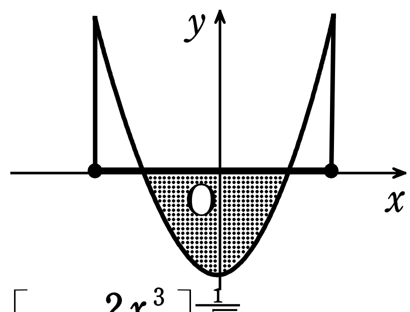
$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{e}{2}\times 1-\dfrac{1}{2}$　⇐　こっちが簡単な解法　…

（３） $x=\cos t$, $y=\cos 2t$ $(0\leqq t\leqq \pi)$ x 軸

t を消去　$y=2\cos^2 t-1$ より $y=2x^2-1$

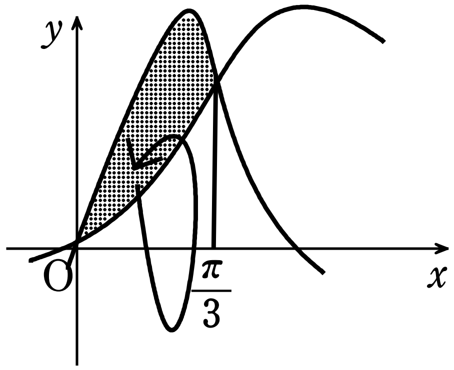
ただし

t	$0\to\pi$
x	$1\to -1$



囲まれた図形は右図　$S=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1-2x^2)dx=2\left[x-\frac{2x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$$=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=2\times\frac{3-1}{3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$



（４）2つの曲線 $y=\sin x$, $y=\sin 2x$

ただし　$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}$ で囲まれた部分を

x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積

交点の x 座標　$\sin x=\sin 2x$ より

$\sin x(1-2\cos x)=0$　よって $x=0,\ \frac{\pi}{3}$

回転体の体積　$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin^2 2x-\sin^2 x)\,dx$

ここで　$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}(1-\cos 4x)dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 4x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{16}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

$V=\pi\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{16}-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{16}\pi$

（５）曲線 $y=\sqrt{x}-\dfrac{x\sqrt{x}}{3}$ $(1\leqq x\leqq 4)$

長さL$=\displaystyle\int_1^4\sqrt{1+(y')^2}\,dx$

$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{2}\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$ より $(y')^2=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x}+x-2\right)$

$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x}+x-2\right)}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{x}+x+2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)$

従って　$\mathrm{L}=\displaystyle\int_1^4\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}+1}\right]_1^4$

$=\left[\sqrt{x}+\dfrac{x\sqrt{x}}{3}\right]_1^4=\left(2+\dfrac{8}{3}\right)-\left(1+\dfrac{1}{3}\right)=1+\dfrac{7}{3}$

$=\dfrac{10}{3}$

（６）直線上を動く物体の t 秒後の速度 $v=40-1.5t-4\sqrt{t}$ であるとき　速度が 0 になるまでに進む道のりL

$v=0$のとき　$1.5t+4\sqrt{t}-40=0$ より $3(\sqrt{t})^2+8\sqrt{t}-80=0$　因数分解

$(3\sqrt{t}+20)(\sqrt{t}-4=0)$　よって　$t=16$

道のりL$=\displaystyle\int_0^{16}|v|dt=\int_0^{16}(40-1.5t-4\sqrt{t})dt$

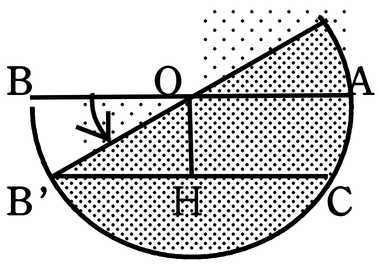
$=\left[40t-\dfrac{3}{2}\times\dfrac{t^2}{2}-4\times\dfrac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^{16}$

$=\left[40t-\dfrac{3}{4}t^2-\dfrac{8}{3}t\sqrt{t}\right]_0^{16}=40\times16-\dfrac{3}{4}\times16^2-\dfrac{8}{3}\times16\times4$

$=4\times16\left(10-3-\dfrac{8}{3}\right)=64\times\dfrac{13}{3}=\dfrac{832}{3}$

（７）水を満たした半径 acm の半球形の容器から静かに 30° 傾けるとき　A’

こぼれる水の量



こぼれる水は右図BCA’の点線部分の立体

線分B’Cがヒントになって発見　大助かり！

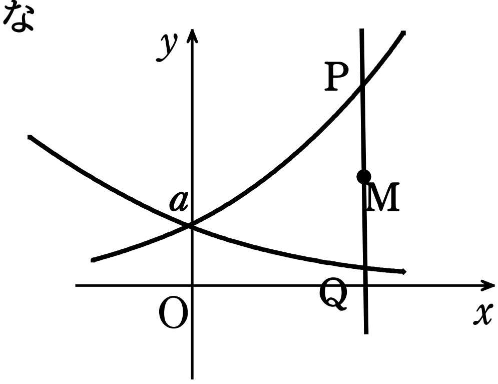
こぼれる水は　右図ＢB’CAが表す立体

即ち ＯＨの周りに図形ＯＡＣＨを１回転した

回転体の体積V＝ $\pi\int_0^{\frac{a}{2}}(a^2-x^2)dx = \pi\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{a}{2}} = \pi\left(\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{24}\right)$

$= \frac{11}{24}\pi a^3\ cm^3$

（8）　$y=ae^{\frac{x}{a}}$, $y=ae^{-\frac{x}{a}}$ のグラフと y 軸に平行な直線との交点をP, Qとする。ただし $a>0$



（ i ）線分PQの中点Mの軌跡

2つのグラフはｙ軸対称　M (X, Y) とおく

$\mathrm{X}=x$　　$\mathrm{Y}=\dfrac{1}{2}\left(ae^{\frac{x}{a}}+ae^{-\frac{x}{a}}\right)$ であるから

Mの軌跡を表す関数 $Y=\dfrac{1}{2}\left(ae^{\frac{X}{a}}+ae^{-\frac{X}{a}}\right)$ ここで　X, Y を x, y に置き換えて　M(x, y) の軌跡は　曲線 $y=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ である。

（ii）$0\leqq x\leqq x_0$ の範囲内にある点Mの軌跡の長さ

$$\mathrm{L}=\int_0^{x_0}\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$y'=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}}-\frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$$ より

$$(y')^2=\frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}}-2+e^{-\frac{2x}{a}}\right)$$ よって

$$1+(y')^2=\frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}}\right)=\left\{\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)\right\}^2$$ 従って

$$\mathrm{L}=\int_0^{x_0}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{x_0}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[ae^{\frac{x}{a}}-ae^{-\frac{x}{e}}\right]_0^{x_0}=\frac{a}{2}\left\{\left(e^{\frac{x_0}{a}}-e^{-\frac{x_0}{a}}\right)-(1-1)\right\}$$

$$=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x_0}{a}}-e^{-\frac{x_0}{a}}\right)$$